

# 秩约束的快速鲁棒主成分分析算法及应用

何锐<sup>1</sup>, 徐正勤<sup>2</sup>, 伍世虔<sup>1</sup>, 贾蒙<sup>3</sup>

(1. 武汉科技大学信息科学与工程学院, 湖北武汉 430081; 2. 武汉科技大学机械自动化学院, 湖北武汉 430081;  
3. 新乡学院机电工程学院, 河南新乡 453003)

**摘要:** 鲁棒主成分分析被广泛应用于计算机视觉领域, 然而现有鲁棒主成分分析方法难以针对各种场景准确分离出低秩信息, 而且计算成本高导致算法的实时性不足. 针对这两个问题, 本文提出了一种新型鲁棒主成分分析算法. 一方面基于先验秩信息提出了低秩约束改进模型, 提高算法在不同场景中的泛化性能; 另一方面引入了黎曼优化理论, 将目标矩阵投影到低维子空间上求解, 减少算法的运算复杂度. 各种实验结果表明, 与现有算法相比, 改进算法在速度上有非常大的优势, 同时能够保证稳定的恢复能力.

**关键词:** 鲁棒主成分分析; 计算机视觉; 黎曼优化

**基金项目:** 国家自然科学基金(No.61775172, No.61371190); 河南省高校科技创新人才支持计划(No.21HAS-TIT021)

中图分类号: TN391.41

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2023)06-1448-10

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20210557

## Fast Robust Component Analysis with Rank Constraint and Applications

HE Rui<sup>1</sup>, XU Zheng-qin<sup>2</sup>, WU Shi-qian<sup>1</sup>, JIA Meng<sup>3</sup>

(1. School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430081, China;  
2. School of Machinery and Automation, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430081, China;  
3. School of Mechanical and Electrical Engineering, Xinxiang University, Xinxiang, Henan 453003, China)

**Abstract:** Robust principal component analysis (RPCA) is widely used in the field of computer vision. The current RPCA method is facing the issue of difficulty to accurately separate low-rank information, as well as low efficiency due to high computational cost. To solve both problems, a novel RPCA optimization is proposed. Specifically, a low-rank constraint model is presented based on the prior rank information to improve the recovery performance. On the other hand, Riemannian optimization, which projects the matrix into a low-dimensional subspace to reduce the complexity, is employed. Various experiments show that the proposed algorithm has significant advantages in terms of efficiency and recovery accuracy in comparison to the existing algorithms.

**Key words:** Robust principal component analysis; computer vision; Riemannian optimization

**Foundation Item(s):** National Natural Science Foundation of China (No.61775172, No.61371190); Support Plan for Scientific and Technological Innovation Talents in Colleges and Universities of Henan Province (No.21HASTIT021)

## 1 引言

许多图像处理问题, 比如移动目标检测<sup>[1-3]</sup>、人脸阴影去除<sup>[4]</sup>、背景建模<sup>[5,6]</sup>、批量图像对齐<sup>[7,8]</sup>等, 可以表征寻找底层数据的低秩结构问题. 例如, 在背景建模应用中, 低秩信息对应于平稳的静态背景相叠加, 而非低秩分量就是捕获的前景中的运动物体; 人脸图像阴影去除问题中, 图片集之间的人脸具有低秩相关性, 而阴

影部分具有随机、不相关的特性; 批量图像对齐应用中, 需要将输入图片集与固定的规范模板图像对齐, 因此对齐图片结果叠加在矩阵中时, 矩阵具有低秩性. 这类隐含低秩关系的图像处理问题, 均可以采用低秩矩阵恢复方法. 鲁棒主成分分析(Robust Principal Component Analysis, RPCA)<sup>[9]</sup>方法在剔除异常值的同时能够较好地恢复低秩矩阵, 因此在这些低秩相关的领域引

起了广泛关注.

RPCA旨在从一个含有低秩信息的观察矩阵( $\mathbf{M}$ )中分离出低秩矩阵( $\mathbf{L}$ )和稀疏矩阵( $\mathbf{S}$ ),其优化模型如下:

$$\begin{aligned} & \arg \min_{\mathbf{L}, \mathbf{S}} \text{rank}(\mathbf{L}) + \lambda \|\mathbf{S}\|_0 \\ & \text{s.t. } \mathbf{M} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{M} \in \mathcal{R}^{m \times n}$  为输入的观察矩阵;  $\text{rank}(\cdot)$  为秩函数;  $\|\cdot\|_0$  为  $\ell_0$  范数;  $\lambda$  为权重系数. 在理想情况下, 式(1)通过估计低秩矩阵  $\mathbf{L}$  的秩和稀疏矩阵  $\mathbf{S}$  的  $\ell_0$  范数可以将观察矩阵  $\mathbf{M}$  中的隐含低秩信息和稀疏信息分离出来. 但是不幸的是式(1)的最小化问题是非凸的, 且 NP-hard 问题不能直接求解. 因此, Candès 等人<sup>[9]</sup>提出了其近似凸优化模型:

$$\begin{aligned} & \arg \min_{\mathbf{L}, \mathbf{S}} \|\mathbf{L}\|_* + \lambda \|\mathbf{S}\|_1 \\ & \text{s.t. } \mathbf{M} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $\|\mathbf{L}\|_* = \sum_1^{\min(m,n)} \sigma_i(\mathbf{L})$  为矩阵  $\mathbf{L}$  的核范数, 表示  $\mathbf{L}$  的所有奇异值之和,  $\sigma_i(\mathbf{L})$  表示  $\mathbf{L}$  的第  $i$  个奇异值;  $\|\cdot\|_1$  为  $\ell_1$  范数. 通常采用式(2)中核范数最小化问题代替秩最小化问题<sup>[10]</sup>, 并通过非精确拉格朗日乘子法(Inexact Augmented Lagrange Multipliers, IALM)<sup>[11]</sup>高效、准确地求解低秩和稀疏矩阵. 其中求解核范数近似问题<sup>[12]</sup>可以通过奇异值软阈值算子<sup>[13]</sup>得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^* &= \arg \min_{\mathbf{L}} \|\mathbf{M} - \mathbf{L}\|_F + \tau \|\mathbf{L}\|_* \\ &= \mathbf{U}\mathbf{S}[\boldsymbol{\Sigma}] \mathbf{V}^T \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $\tau$  作为阈值, 能够保证恢复矩阵的低秩性;  $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\{\sigma_i\}_{1 \leq i \leq \min(m,n)})$  为  $\mathbf{M}$  的奇异值矩阵;  $(\mathbf{S}_\tau[\boldsymbol{\Sigma}])_{ii} = \text{sign}(\sigma_i) \cdot \max(|\sigma_i| - \tau, 0)$  为软阈值算子.  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  由矩阵  $\mathbf{M}$  的奇异值分解  $\mathbf{M} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T$  可得. 从式(3)可以明显看出所有奇异值大小均等于收缩  $\tau$  大小. 所以当矩阵奇异值过小时, 恢复的低秩矩阵可能为一个秩亏矩阵(矩阵的秩小于目标秩), 或者当矩阵奇异值过大时, 无法得到目标秩的矩阵, 导致无法精确地恢复出低秩矩阵.

为了提高核范数最小化的灵活性, Gu 等人<sup>[14]</sup>根据奇异值大小关系建立权重并提出了加权核范数最小化模型(Weighted Nuclear Norm Minimization, WNNM). 原始的核范数由加权核范数  $\|\mathbf{L}\|_w = \sum_1^{\min(m,n)} w_i \sigma_i(\mathbf{L})$  代替, 其中  $w_i$  为每个奇异值的非凸权重. 该方法提高了低秩矩阵恢复的准确性, 但是需要根据实际应用场景手动调整参数, 导致在实际应用中泛化能力不足.

对于一些采样条件苛刻的环境, 例如高速运动下的物体检测, 常常导致采样不足的情况, 当数据样本不足时, RPCA 算法的恢复效果会受到严重的影响. 同时

在一些机器视觉问题上, 目标低秩矩阵  $\mathbf{L}$  的秩其实是已知的. 例如, 背景分离中秩为 1, 光度立体视觉中秩为 3. 为了解决小样本场景问题, Oh 等人<sup>[15]</sup>基于先验秩信息提出了部分奇异值最小化(Partial Sum of Singular Values, PSSV)模型, 即

$$\begin{aligned} & \arg \min_{\mathbf{L}, \mathbf{S}} \|\mathbf{L}\|_{p=r} + \lambda \|\mathbf{S}\|_1 \\ & \text{s.t. } \mathbf{M} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \end{aligned} \quad (4)$$

其中,  $\|\mathbf{L}\|_{p=r} = \sum_{r+1}^{\min(m,n)} \sigma_i(\mathbf{L})$ , 表示为秩  $r$  之后的奇异值之和. 部分奇异值之和最小化模型加强了低秩约束, 在样本不足(观察数据少)的情况下, 得到非常优越的低秩恢复效果. 但是在某些视觉问题中, 例如稀疏离群点是非均匀、非随机分布的, 对应的观察矩阵奇异值更大, PSSV 恢复的低秩矩阵的秩往往会大于目标秩, 容易将稀疏信息分解至低秩矩阵中, 导致恢复效果不佳. 同时, 上述算法由于求解低秩矩阵问题时需要 Full-SVD 分解, 面对维数大的矩阵, 效率非常低. 随着目前数据采集设备不断升级, 大部分图像处理应用需要的数据量不断加大, 上述算法难以在工程中达到实时要求.

为了解决 PSSV 遗留的上述问题, 本文基于先验秩信息提出了基于秩约束的鲁棒主成分分析(Rank Constraint-Robust Principal Component Analysis, RC-RPCA)算法, 模型如下:

$$\begin{aligned} & \arg \min_{\mathbf{L}, \mathbf{S}} \|\mathbf{S}\|_1 \\ & \text{s.t. } \mathbf{M} = \mathbf{L} + \mathbf{S}, \\ & \text{rank}(\mathbf{L}) = r \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)根据秩先验信息使用秩约束来约束低秩结构. 利用核范数最小化和部分奇异值最小化逼近秩函数的主要局限是在低秩或稀疏结构不满足输入假设条件的情况下, 通过奇异值阈值算子处理难以得到秩为目标秩大小的低秩矩阵. 理论上通常调节参数  $\lambda$  以平衡核范数和  $\ell_1$  范数的关系, 可以加强对低秩结构的惩罚程度, 但是在实际应用中, 我们无法知道真实的低秩稀疏关系, 因此低秩结构难以实现. 而尽管 RC-RPCA 优化模型是非凸的, 但从实验中发现, 当目标矩阵的秩较小时, 即使在低秩信息被扰断地非常严重的情况下, 仍然能够准确恢复出秩为目标秩的低秩矩阵. 秩约束可以看作仅保留  $\mathbf{L}$  中的秩之前的最大奇异值组, 其中包含了大部分的低秩信息. 相反, 我们没有最小化秩之外的奇异值对应子空间, 也避免在非均匀分布的稀疏离散场景下, 错误地将稀疏信息分离到低秩矩阵中的情况, 同时还能保留低秩矩阵的低秩结构, 因此低秩矩阵  $\mathbf{L}$  可以被更精准地恢复出来.

另外, 本文采用截断奇异值分解得到低秩矩阵问题的封闭解, 简化了阈值计算. 为了进一步提高算法运行效率, 本文引入了黎曼优化理论, 在求解低秩矩阵时

降低了奇异值分解的运算复杂度. 该改进算法不仅运行速度远快于现有算法, 而且在复杂的应用环境中, 例如样本不足或者稀疏分量非均匀、非随机分布的情况下都有更好的性能表现. 同时在各种应用场景下, 例如背景建模、人脸图像阴影去除、批量图像对齐中将几种先进的RPCA算法与本文算法进行了对比. 结果表明, 本文的改进算法均能获得更好的处理效果.

## 2 结合黎曼优化求解的快速RC-RPCA算法

### 2.1 RC-RPCA模型的推导

核范数最小化模型的许多变体都是将约束项改为惩罚项<sup>[16]</sup>, 或者相反. 同理, 本文将式(2)的低秩惩罚项改为约束项, 如下:

$$\begin{aligned} & \arg \min_{L, S} \|S\|_1 \\ & \text{s.t. } M = L + S, \|L\|_* \leq t \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $t$  为不定常数. 很明显, 当输入矩阵确定后,  $t$  的大小与低秩矩阵的秩  $r$  有关. 由于式(6)在不等式约束  $\|L\|_* \leq t$  范围内的解都是有效的, 因此只要取得一个合适的参数  $t$ , 便可以用更好处理的等式约束代替不等式约束. 从文献[14]中得知, 输入数据矩阵的较大奇异值包含了其主要的信息. 例如, 图像中相似块矩阵对应的大奇异值提供了主要的边缘和纹理信息. 因此为了尽可能保证低秩信息和低秩结构, 我们假设  $t$  满足下式:

$$t = \|P_r(L)\|_* \quad (7)$$

其中,  $P_r(\cdot)$  为矩阵到秩  $r$  矩阵的投影算子, 如定义1所示. 由于核范数本身是由秩函数凸松弛而来, 基于先验秩信息我们采用秩约束  $\text{rank}(L) = r$  代替核范数约束以加强目标低秩矩阵秩约束, 由此得到式(5)的优化模型.

定义1 (投影算子)

$$P_r(X) = U_{1:r}^T X V_{1:r} \quad (8)$$

其中,  $U_{1:r}^T$  和  $V_{1:r}$  是由  $X$  的前  $r$  个最大奇异值对应的左右奇异向量组成.

### 2.2 RC-RPCA的求解

为了优化式(5), 本文采用IALM求解算法. IALM也被称为交替方向乘子法(Alternating Direction Multiplier Method, ADMM), 其通过交替固定非求解分量, 经过阈值处理得到当前分量的最优解. 但是由于秩函数  $\text{rank}(\cdot)$  是非凸且不连续的, 当建立增广拉格朗日函数时, 将秩函数保留为约束项, 即

$$\arg \min_{L, S, Y} \|S\|_1 + \langle Y, M - S - L \rangle + \frac{1}{2} \mu \|M - L - S\|_F^2 \quad (9)$$

$$\text{s.t. } \text{rank}(L) = r$$

其中,  $Y \in \mathcal{R}^{m \times n}$  为拉格朗日乘子矩阵;  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  为矩阵内积运算;  $\mu$  为惩罚参数;  $\|\cdot\|_F$  为矩阵的Frobenius范数. 根据

IALM可知, 式(9)的三个变量在迭代中需要分别求解. 求解某一个变量时, 需固定其余两个变量得到其封闭解. 所以当求解稀疏矩阵  $S$  时, 固定  $L$  分量, 其秩约束相当于常数. 因此可以得到式(9)化简之后  $L$  和  $S$  的优化问题如下.

$$\begin{aligned} & \mathbf{S子问题} \quad \text{固定 } L \text{ 和 } Y \text{ 得到求解 } S \text{ 的子问题表示为} \\ & S^* = \arg \min_S \|S\|_1 + \langle Y, M - S - L \rangle + \frac{1}{2} \mu \|M - L - S\|_F^2 \\ & = \arg \min_S \|S\|_1 + \frac{1}{2} \mu \|S - (M - L + \mu^{-1} Y)\|_F^2 \\ & = \mathcal{S}_1 \left[ M - L + \mu^{-1} Y \right] \end{aligned} \quad (10)$$

通过  $\mathcal{S}_1[\cdot]$  软阈值算子计算, 可以得到式(10)的最优稀疏矩阵.

$$\begin{aligned} & \mathbf{L子问题} \quad \text{固定 } S \text{ 和 } Y \text{ 得到求解 } L \text{ 的子问题表示为} \\ & L^* = \arg \min_{\text{rank}(L)=r} \langle Y, M - S - L \rangle + \frac{1}{2} \mu \|M - L - S\|_F^2 \\ & = \arg \min_{\text{rank}(L)=r} \frac{1}{2} \|L - (M - S + \mu^{-1} Y)\|_F^2 \end{aligned} \quad (11)$$

根据传统的RPCA算法可知, 式(11)一般采用奇异值软阈值算子求解. 但是由于秩约束的条件, 本文直接采用截断奇异值分解求解, 即

$$L^* = H_r(M - S + \mu^{-1} Y) \quad (12)$$

其中,  $H_r(X) = U_x \text{diag}(\sigma_i(X)) V_x^T$  为截断奇异值分解,  $\sigma_i(X)$  为前  $r$  个奇异值.  $U_x$  和  $V_x$  可以由  $X$  的奇异值分解  $U_x \Sigma_x V_x$  得到. 但是截断奇异值分解维数大的矩阵时, 仍然面临着复杂度高的问题. 为了加快算法运行速度, 本文引入了新的低秩求解方法.

### 2.3 基于黎曼优化求解的快速秩约束鲁棒主成分分析

基于低秩矩阵的黎曼优化算法已经在矩阵完成领域被广泛应用<sup>[17,18]</sup>. 黎曼优化的矩阵完成算法普遍采用黎曼梯度求解, 即将目标矩阵投影到低秩流形的切线子空间后再映射在低秩流形空间, 一方面实现低秩空间投影, 另一方面大大降低矩阵投影的计算成本. 据此, 为了降低矩阵截断奇异值分解的复杂度, 本文在求解低秩矩阵  $L$  子问题中引入黎曼优化方法.

由于待恢复的低秩矩阵  $L$  可以看作存在于一个低秩空间中, 因此本文建立了基于黎曼流形的秩约束鲁棒主成分分析方法模型, 即

$$\begin{aligned} & \arg \min_{L, S} \|S\|_1 \\ & \text{s.t. } M = L + S, L \in \mathcal{M}_r \end{aligned} \quad (13)$$

其中,  $\mathcal{M}_r$  表示一个嵌入  $\mathcal{R}^{m \times n}$  的  $(m+n-r)r$  维光滑流形, 并且

$$\mathcal{M}_r = \{L \in \mathcal{R}^{m \times n}, \text{rank}(L) = r\} \quad (14)$$

因此,对于式(11)的低秩矩阵  $L$  求解子问题,基于黎曼流形的求解如下:

$$L^* = \arg \min_{\mathcal{M}_r = \{L; \text{rank}(L)=r\}} \frac{1}{2} \|L - (M - S + \mu^{-1}Y)\|_F^2 \quad (15)$$

通过第  $k$  次迭代结果的矩阵  $L_k$ ,可以得到其左右奇异向量  $(U, V)$  组成的  $(m+n-r)r$  维的切线子空间<sup>[19]</sup>为

$$T_L = \{AV^T + UB^T; A \in \mathcal{R}^{m \times r}, B \in \mathcal{R}^{n \times r}\} \quad (16)$$

基于黎曼流形的加速算法求解式(15)首先需要将目标矩阵投影到低维子空间  $T_L$  上,再将投影的结果收缩在  $\mathcal{M}_r$  上得到  $L_{k+1}$ .

假设  $M - S + \mu^{-1}Y = Z$ , 定义  $P_U = UU^T$  和其正交补  $P_U^\perp = I - P_U$ ,  $P_V = VV^T$  和其正交补  $P_V^\perp = I - P_V$ . 可以得到求解低秩矩阵子式(15)的方法如下:

$$\begin{aligned} L^* &= H_r(P_{T_L} Z) \\ &= H_r(P_U Z P_V + P_U^\perp Z P_V + P_U Z P_V^\perp) \end{aligned} \quad (17)$$

虽然最终的子空间投影结果收缩到秩为  $r$  的流形空间中仍然需要用到截断奇异值分解,但是经过投影  $P_{T_L} Z$  后数据已经映射到一个低维子空间中,只需计算一个低维矩阵的奇异值分解就可以将矩阵收缩至低秩空间.

假设  $Y_1 = U^T Z (I - VV^T) = R_1^T Q_1^T$  为  $Y_1$  的 QR 分解,  $Y_2 = (I - UU^T) Z V = Q_2 R_2$  为  $Y_2$  的 QR 分解, 并且有  $U^T Q_2 = 0, V^T Q_1 = 0$ . 则式(17)中矩阵在切线子空间的投影计算方法如下:

$$\begin{aligned} P_{T_L} Z &= UU^T Z V V^T + UU^T Z (I - VV^T) + (I - UU^T) Z V V^T \\ &= UU^T Z V V^T + UR_1^T Q_1^T + Q_2 R_2 V^T \\ &= [U Q_2] \begin{bmatrix} U^T Z V & R_1^T \\ R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^T \\ Q_1^T \end{bmatrix} \\ &= [U Q_2] D \begin{bmatrix} V^T \\ Q_1^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

其中,  $[U Q_2]$  和  $[V Q_1]$  为酉矩阵. 所以  $P_{T_L} Z$  的收缩,可以由  $D = \begin{bmatrix} U^T Z V & R_1^T \\ R_2 & 0 \end{bmatrix}$  的奇异值分解求得. 由于  $D$  是一个  $2r \times 2r$  维数的矩阵,因此奇异值分解的复杂度从原来的  $O(\min(m, n)^3)$  降至  $O(r^3)$ . 在  $(\min(m, n) \gg r)$  的情况下,结合黎曼流形的 RC-RPCA,能够大大地加快算法的运行速度.

本文将基于黎曼优化求解的秩约束鲁棒主成分分析方法命名为 FRC-RPCA (Fast Rank Constraint -Robust Principal Component Analysis), 流程总结为算法 1. 算法 1 中的低秩矩阵  $\{L_k\}$ 、稀疏矩阵  $\{S_k\}$  序列满足下列等式:

$$C_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \|L_{k+1} - L_k\|_F = 0,$$

$$C_S = \lim_{k \rightarrow \infty} \|S_{k+1} - S_k\|_F = 0,$$

$$C_M = \lim_{k \rightarrow \infty} \|M - L_{k+1} - S_{k+1}\|_F = 0.$$

上式可以由合成数据实验证明. 如图 1 所示,随着横坐标表示的迭代次数的增加,纵坐标表示的  $C_L, C_S, C_M$  逐步收敛至 0.

#### 算法 1 FRC-RPCA

输入:  $M \in \mathcal{R}^{m \times n}, \mu = \sqrt{\max(m, n)} / \max(\sigma_i(M)), r, \rho$

初始化:  $S_0 = 0, L_0 = 0, [U_0, V_0] = \mathcal{H}_r[M], Y_0 = M$

WHILE  $\frac{\|M - S_k - L_k\|_F}{\|M\|_F} > 10^{-7}$  DO

计算  $S_{k+1} = S_1[\frac{M - L_k + \mu^{-1}Y_k}{\mu}]$

计算  $L_{k+1} = \mathcal{H}_r[T_L(M - S_{k+1} + \mu^{-1}Y_k)]$

计算  $Y_{k+1} = Y_k + \mu(M - L_{k+1} - S_{k+1})$

更新  $\mu = \min(\mu * \rho, \mu * 10^7)$

END WHILE

输出:  $L, S$

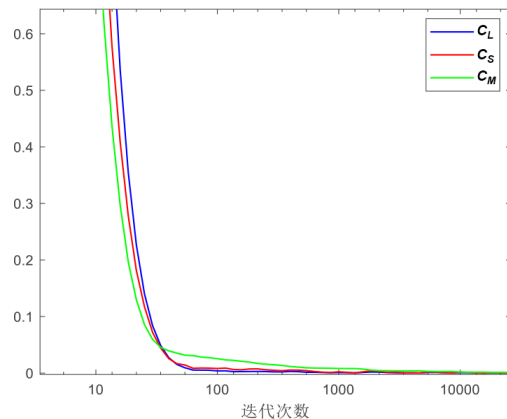


图 1  $C_L, C_S, C_M$  随迭代次数的变化

注: 矩阵  $M \in \mathcal{R}^{m \times n}, m = 10\,000, n = 20, r = 3$ , 扰断率  $\beta = 0.05$ .

## 3 实验结果与分析

### 3.1 实验说明

为了评估 FRC-RPCA 算法的性能,本文分别在合成数据和真实图像处理实验中对了几种代表算法. 实验参数中步长  $\rho$  设置为 1.5,其余参数参照文献[9]采用默认设置. 所有算法代码通过 MATLAB 软件在硬件为 32GB RAM, 3.4 Hz CPU 的 PC 上运行.

### 3.2 合成数据实验

为了评估 FRC-RPCA 算法的低秩矩阵恢复性能, 本文将 FRC-RPCA 算法与 RPCA 算法<sup>[9]</sup>、PSSV 算法<sup>[15]</sup>、WNNM 算法<sup>[14]</sup>、LRS-D-TNNSR 算法<sup>[20]</sup>、Adaptive-RPCA 算法<sup>[21]</sup>这几种经典算法进行比较. 通过低秩矩阵恢复

的成功率和算法的运算时间来衡量算法的性能。

合成矩阵中低秩信息和稀疏信息采用随机、均匀的元素分布. 首先生成秩为  $r$  的低秩矩阵  $L \in \mathcal{R}^{m \times n} = XY$ , 其中  $X \in \mathcal{R}^{m \times r}$  和  $Y \in \mathcal{R}^{r \times n}$  中的条目符合均匀分布  $U[0, 1]$ . 然后从低秩矩阵  $L$  中随机选取  $m \times n \times \beta$  ( $\beta$  表示扰断率,  $\beta$  越大, 表示低秩矩阵被破坏越严重) 个元素的索引生成离群点, 同时每个离群点符合正态分布  $\mathcal{N}(0.5, 1)$ . 为了评估算法恢复效果, 本文采用低秩矩阵

的标准均方根误差  $\text{err}_L = \frac{\|L^* - L\|_F}{\|L\|_F}$  作为恢复指标, 当

$\text{err}_L < 10^{-4}$  时, 即认为低秩矩阵被精确恢复. 并且设置终止条件  $\|M - S_k - L_k\|_F \leq 10^{-7} \|M\|_F$ , 保证每个算法能够达到最优收敛.

为了验证在不同的观测数下各算法的收敛速度及恢复能力, 本文计算了不同条件下 10 次随机数据矩阵输入各种算法后恢复的低秩矩阵的均方根误差, 再统计成功恢复的次数来计算成功率. 通过固定  $m = 10\,000$ ,  $r = 3$ ,  $\beta = 0.15$ , 改变样本大小  $n$  得到的实验结果如表 1 所示. 其中每行表示当前算法在不同的观测数  $n$  下的低秩矩阵恢复成功率. 根据表 1 可知算法在观测数大于 100 时, 均能保证较好的恢复效果, 但是随着观测数量的减少, 各算法的低秩矩阵重构性能会有所下降, 其中 FRC-RPCA 算法和 Adaptive-RPCA 算法能在观测数极少, 概率恢复出低秩矩阵. 总体来看, FRC-RPCA 算法在样本量不足的情况下, 有比其他算法更好的低秩矩阵恢复效果. 为了评估算法的收敛速度, 图 2 展示了各算法在不同的观测数下的运行时间, 横坐标表示不同的观测数, 纵坐标表示运行的时间. 从图 2 中可以明显看出 FRC-RPCA 算法加速效果明显, 在观测数为 2 000 时, 比 Adaptive-RPCA 算法快 10 倍不止, 和其他算法相比, 运行速度也快 3 倍以上 (图 2 中由于 PSSV 和 RPCA 的结果相差很小, 所以 RPCA 线条在图中被覆盖).

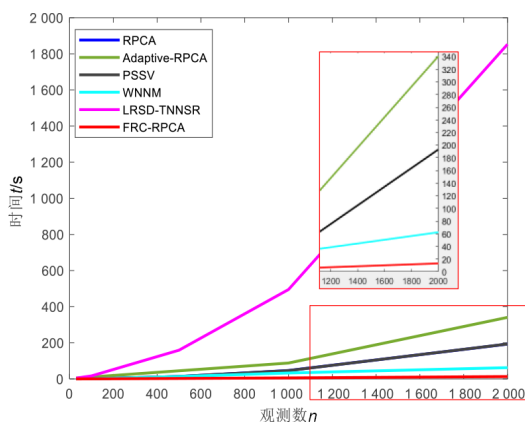


图 2 不同观测数下各算法的运行时间

表 1 不同算法在不同观测数大小下的精确恢复低秩矩阵成功率

观测数 $n$	40	50	60	70	100	500	1 000
RPCA	0	0	0	0	100	100	100
PSSV	0	60	80	100	100	100	100
WNNM	0	30	80	100	100	100	100
LRSD-TNNSR	0	0	0	0	90	100	100
Adaptive-RPCA	10	60	90	100	100	100	100
FRC-RPCA	20	80	100	100	100	100	100

单位: %

### 3.3 真实图片实验

为了衡量 FRC-RPCA 算法在真实图像处理应用中的性能, 本文对比了 FRC-RPCA 和其他优秀算法在背景建模、人脸图片阴影去除、批量图片对齐实验的恢复效果. 数据集包含了不同样本大小、光照变化、缓慢运动等干扰因素, 能够全面地验证算法在不同环境下性能表现.

#### 3.3.1 背景建模

本文在背景建模应用中完成了两组对比实验. 一类是采用 5 张高动态图片的 ArchSequence 图片集<sup>[22]</sup>; 另一类是采用静态背景的 SBI 数据集 (<https://sbmi2015.na.icar.cnr.it/SBIdataset.html>), 本文使用了其中的图片尺寸为  $384 \times 256$ , 样本大小为 610 的 CAVIAR1 视频序列, 以及尺寸为  $320 \times 240$ , 样本大小为 740 的 HumanBody2 视频序列. 本实验的输入是一组具有相关性背景的图片集, 目标是分离出各图片中的异常值, 如移动对象和离群像素点. 首先通过矢量化输入图像并叠加构造观察矩阵  $M \in \mathcal{R}^{m \times n} = [\text{vec}(I_1, I_2, \dots, \text{vec}(I_n))]$ , 其中  $m, n$  分别为单张图片的像素点个数和总图片帧数, 然后利用 RPCA 算法便可以将低秩背景信息分离出来. 由于背景建模实验中输入图像的背景是线性相关的, 因此在 CAVIAR1 和 HumanBody2 视频帧实验中理想秩为 1, 而 ArchSequence 图片集中不仅出现了人物的移动, 还有光照的变化, 因此在实践中我们发现设置先验秩为 2 可以得到更理想的效果.

图 3 展示了各算法在高动态图片集 ArchSequence 的背景建模实验结果. 其中上下两行分别为各算法的背景和前景建模结果. 由于高动态图片集中图片数量较小, 各算法在背景建模时的低秩重构性能有所降低. 可以从图 3 看出 RPCA 算法、PSSV 算法、LRSD-TNNSR 算法和 Adaptive-RPCA 算法的背景建模结果都有部分鬼影. WNNM 算法经过调整特定参数可以达到较好的分离效果. FRC-RPCA 算法在已知秩为 2 的情况下, 能够分离出更加干净的背景图片.

图 4 展示了各算法在大样本视频集的背景建模实验结果. 在视频序列数据集中, CAVIAR1 和 HumanBody2 内的人物移动缓慢导致在连续的视频帧中出现

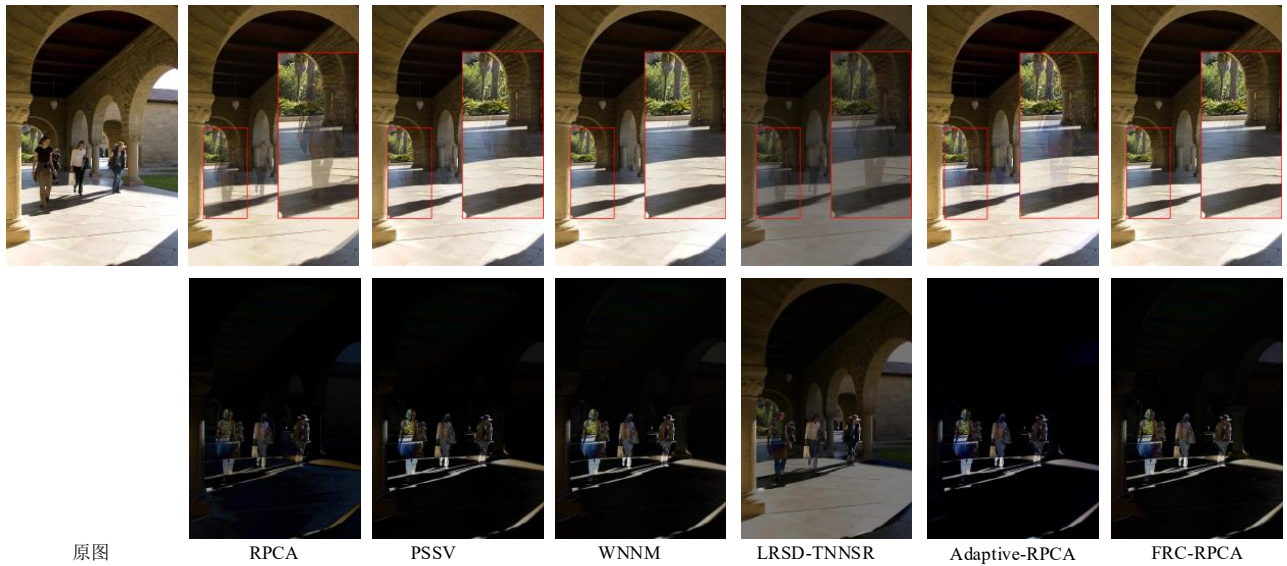


图3 ArchSequence 高动态图片集的背景建模实验(上下两行分别为背景和前景建模结果)

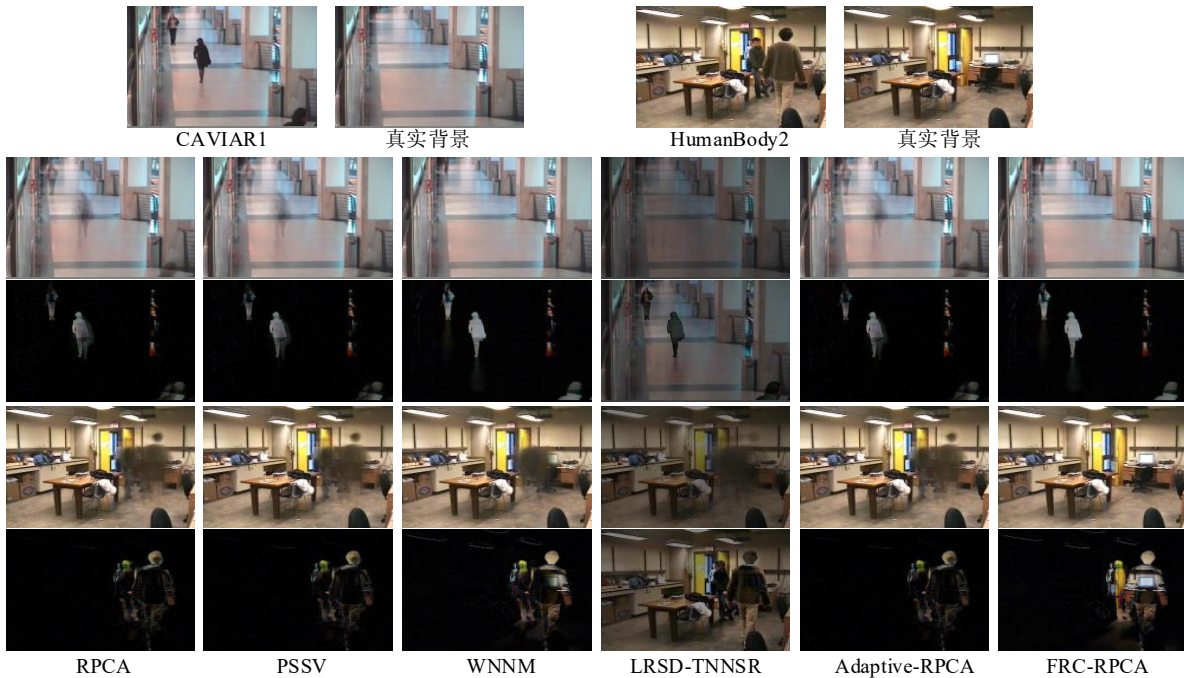


图4 CAVIAR1 和 HumanBody2 视频集的背景建模实验(上下两组为不同视频帧的建模结果)

在了较多重叠区域. 而这类数据集往往不满足稀疏信息均匀离散分布的条件, 因此不同算法的恢复效果会受到不同程度的影响. 从图中可以明显看出 RPCA 算法、PSSV 算法、Adaptive-RPCA 算法在实验中均存在明显鬼影. LRS-D-TNNSR 算法能较为清晰地分离出背景, 但是得到的结果亮度发生了变化. 经过特调参数后, WNNM 算法在 CAVIAR1 数据集有较好的分离效果, 但是如果不调节参数, 如 HumanBody2 所示, 结果并不理想. FRC-RPCA 算法不需要调节其他参数, 并且对不同的数据集, 均能得到较好的背景建模效果. FRC-RPCA

算法弥补了 RPCA 算法在这类实验场景下分离能力的泛化性不足问题.

SBI 数据集提供了六个背景建模估计指标用于评估结果: AGE, COM, MS-SSIM, pCEPs, pEPs 和 PSNR. AGE 是真实背景和重构背景之间灰度值差的绝对值的平均值. COM 表示彩色图像质量度量值, 该值是基于 YUV 颜色空间计算的 PSNR. MS-SSIM 表示多尺度结构相似性指标, 使用结构失真作为感知视觉失真的估计. pEPs 表示错误像素的百分比, 是恢复的背景图片与真实背景图片中错误像素的占比. pCEPs 表示聚集的错

误像素百分比,该指标认为 pEPs 中错误像素的相邻点也是错误的. PSNR 为真实背景和重构背景的峰值信噪比. 其中 COM, MS-SSIM, PSNR 指标越高表示重构的背景图片质量越好; AGE, pEPs 和 pCEPs 指标越低表示重构的背景图片质量越好.

本文将最难恢复的图片帧结果与真实背景相比较, CAVIAR1 和 HumanBody2 的客观指标结果如表 2 和表 3 所示(已经将最好的结果用粗体表示). 其中每一列代表当前算法恢复的背景图片与当前视频帧图片计算的六种评估指标结果. 可以从表中观察到, FRC-RPCA 在处理这类数据集的评估指标是最好的. 表 4 展示了各种算法的运行时间. 其中每列表示当前算法在 3 组背景建模数据集下的运行时间. 从表 4 可以看出 FRC-RPCA 算法在任意样本大小或分辨率的场景下, 运行时

间远少于其他算法. 基于黎曼优化的 FRC-RPCA 方法在低秩矩阵求解时将时间复杂度从  $O(\min(m, n)^3)$  降至  $O(r^3)$ , 可以从表 4 看出, 更大的数据集或者更高的分辨率图像, FRC-RPCA 的时间优势更加明显.

表 2 各算法在 CAVIAR1 视频帧的背景建模实验的表现

算法	RPCA	PSSV	WNNM	LRSD-TNNSR	Adaptive-RPCA	FRC-RPCA
AGE	4.850	4.610	<b>2.900</b>	61.330	4.600	<b>2.900</b>
COM	27.512	28.530	33.200	11.880	28.550	<b>33.250</b>
MS-SSIM	0.917	0.930	0.980	0.810	0.930	<b>0.990</b>
pCEPs	0.031	0.028	0.004	0.960	0.028	<b>0.002</b>
pEPs	0.038	0.034	<b>0.003</b>	0.970	0.034	<b>0.003</b>
PSNR	28.380	29.460	34.390	12.000	29.480	<b>34.410</b>

表 3 各算法在 HumanBody2 视频帧的背景建模实验的表现

算法	RPCA	PSSV	WNNM	LRSD-TNNSR	Adaptive-RPCA	FRC-RPCA
AGE	11.30	11.14	8.67	104.31	11.12	<b>4.20</b>
COM	19.83	19.98	21.85	7.01	19.98	<b>31.99</b>
MS-SSIM	0.840	0.852	0.911	0.117	0.851	<b>0.994</b>
pCEPs	0.073 5	0.071 7	0.036 4	0.960 1	0.073 3	<b>0.000 4</b>
pEPs	0.106 6	0.104 7	0.059 2	0.980 1	0.107 8	<b>0.004 9</b>
PSNR	20.14	20.30	22.20	6.88	20.30	<b>33.00</b>

表 4 各算法在背景建模实验中的时间对比

单位:s

算法	RPCA	PSSV	WNNM	LRSD-TNNSR	Adaptive-RPCA	FRC-RPCA
ArchSequence (n=5)	9.01	7.20	6.18	68.36	25.43	5.34
HumanBody2 (n=740)	581.57	551.02	137.51	232.27	1 648.01	<b>63.54</b>
CAVIAR1 (n=610)	793.38	740.60	482.09	371.24	2 143.12	<b>80.43</b>

### 3.3.2 人脸图像阴影去除

本文将提出的算法应用于人脸图像的阴影去除应用中, 并对比了应用于人脸阴影去除的 RPCA 算法<sup>[9]</sup>、LRSD-TNNSR 算法<sup>[20]</sup>、Adaptive-RPCA 算法<sup>[21]</sup>及非凸秩近似和稀疏正则化的 RPCA (Robust PCA using Nonconvex Rank Approximation and Sparse Regularizer, RPCA-NRASR)算法<sup>[23]</sup>.

数据集采用 64 张大小为  $192 \times 168$  的 Yale B 人脸数据集<sup>[24]</sup>. 同理, 将每张面部图片矢量化叠加至一个  $32\ 256 \times 64$  的矩阵中, 每一列即一个样本图片. 其中人脸图片的阴影被当作稀疏分量, 人脸信息由于线性相关被当作低秩分量, 通过 RPCA 算法可以将两部分以矩阵形式分离出来.

人脸图像阴影去除的结果如图 5 所示, 上下两行为两张原图以及各种算法的阴影去除结果. 表 5 列出了各算法的运行时间. 可以看出所有算法都能一定程度地去除阴影, 但是各个算法之间的去除效果有明显差距. 可以明显看出 RPCA 算法和 Adaptive-PSSV 算法的恢复结果仍然含有清晰可见的阴影, LRSD-TNNSR 算

法、RPCA-NRASR 算法和 FRC-RPCA 算法均取得了良好的结果, 但可以明显看出 LRSD-TNNSR 算法和 FRC-RPCA 算法得到的人脸细节更加丰富, 但从表 5 可以得知 FRC-RPCA 算法的运行时间远远低于 LRSD-TNNSR 算法和其他算法.

### 3.3.3 批量图像对齐

本节将提出的算法应用于批量图像对齐应用, 实验采用了 Digits\_3 和 Windows 两组数据集<sup>[25]</sup>. 批量图像对齐的任务是将输入图片与固定的规范模板图像对齐. 因此对于输入的批量图片中, 每张输入的图片  $I_i$  需要搜索一个变化矩阵  $g_i$  进行转换, 使输入的图片之间线性相关. 因此在本应用中输入的数据矩阵记为  $M \circ G = [\text{vec}(I_1 \circ g_1) \quad \text{vec}(I_2 \circ g_2) \quad \cdots \quad \text{vec}(I_n \circ g_n)]$ .

批量图像对齐的优化模型如下:

$$\begin{aligned} & \arg \min_{L, S} \|S\|_1 \\ & \text{s.t. } M \circ G = L + S \\ & L \in \mathcal{M}_r \end{aligned} \quad (19)$$

理想情况下, 输入先验条件秩为 1, 即可通过 FRC-

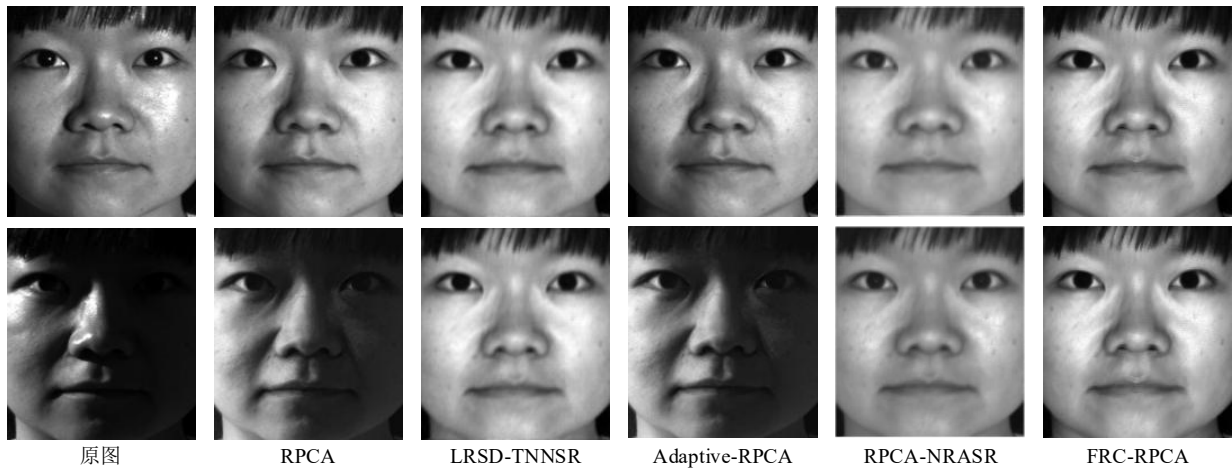


图5 各算法的人脸图像阴影去除结果

表5 各算法在人脸阴影去除实验的运行时间 单位:s

算法	RPCA	LRSD-TNNSR	Adaptive-RPCA	RPCA-NRASR	FRC-RPCA
时间	3.29	30.86	4.34	6.45	<b>0.81</b>

RPCA 算法将变化后的图片的线性相关的元素作为低秩信息分离出来实现对齐的目的. 本文对比了 RASL 算法<sup>[25]</sup>、Adaptive-RPCA 算法<sup>[21]</sup>、 $\ell_p$ +ADMM 算法<sup>[26]</sup> 几种应用于图像对齐的优秀算法.

图6展示了各种算法的批量图像对齐实验结果.

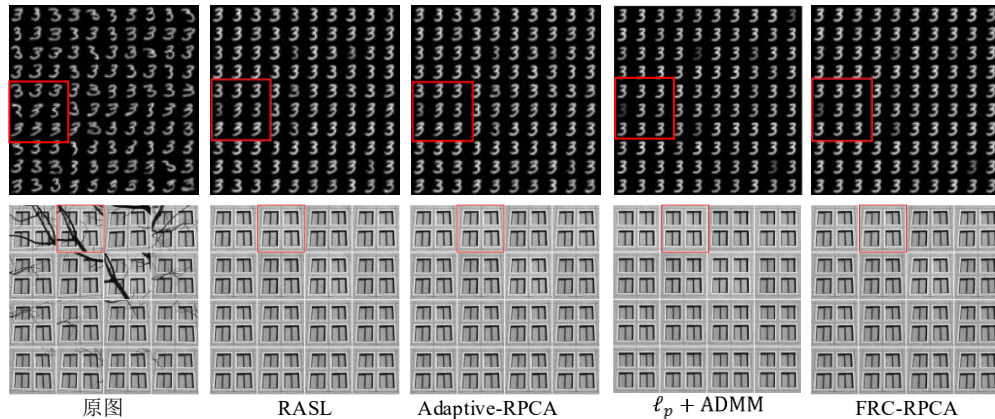


图6 Digits\_3和Windows图片库的批量对齐实验结果

表6 各算法在批量图片对齐实验的运行时间 单位:s

算法	RASL	Adaptive-RPCA	$\ell_p$ +ADMM	FRC-RPCA
Digits_3	189.01	289.01	781.27	<b>108.72</b>
Windows	112.34	162.78	672.19	<b>67.33</b>

#### 4 结论

为了提高传统鲁棒主成分分析方法在复杂环境下

上下两行分别是各算法在 Digits\_3 数据集和 Windows 数据集下的批量对齐结果. 表6列出了各个算法在两个数据集下的运行时间. 在 Digits\_3 数据集中, RASL 算法和 Adaptive-RPCA 算法结果中红框部分的对齐结果不佳, FRC-RPCA 和  $\ell_p$ +ADMM 算法的对齐效果明显好于其他算法. Windows 数据集中, RASL 算法的对齐结果中红框部分存在部分树枝阴影,  $\ell_p$ +ADMM 算法、Adaptive-RPCA 算法和 FRC-RPCA 算法的对齐效果均比较良好, 但从表6可以看出 FRC-RPCA 算法的运行时间远低于其他算法.

的恢复能力以及运算速度, 本文提出了基于先验秩信息的秩约束的快速鲁棒主成分分析方法. 改进模型可以避免将稀疏信息分解到低秩矩阵, 有效提高了在复杂场景下低秩矩阵的恢复能力. 同时在低秩矩阵求解时本文引入黎曼优化的思想提出了 FRC-RPCA 算法, 将低秩求解的时间复杂度从  $O(\min(m, n)^3)$  降至  $O(r^3)$ , 在大样本或密集采样的图像处理应用中, FRC-

RPCA 算法的运行速度提升了一个量级. 在样本不足和稀疏分量非均匀、非随机分布的背景建模实验中, 本文算法都有更好的性能表现, 并且在人脸图像阴影去除和批量图像对齐实验中都表现出更优异的效果, 运行速度上也远远快于当前的 RPCA 算法. 实验证明了 FRC-RPCA 算法在秩已知的图像视觉问题中有更加优秀的处理效果.

#### 参考文献

- [1] 常侃, 张智勇, 陈诚, 等. 采用低秩与加权稀疏分解的视频前景检测算法[J]. 电子学报, 2017, 45(9): 2272-2280.  
CHANG K, ZHANG Z Y, CHEN C, et al. Video foreground detection by low-rank and reweighted sparse decomposition[J]. Acta Electronica Sinica, 2017, 45(9): 2272-2280. (in Chinese)
- [2] JAVED S, MAHMOOD A, AL-MAADEED S, et al. Moving object detection in complex scene using spatiotemporal structured-sparse RPCA[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2019, 28(2): 1007-1022.
- [3] LI L H, HU Q H, LI X. Moving object detection in video via hierarchical modeling and alternating optimization[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2019, 28(4): 2021-2036.
- [4] ZHANG W M, ZHAO X, MORVAN J M, et al. Improving shadow suppression for illumination robust face recognition[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2019, 41(3): 611-624.
- [5] XUE Z C, DONG J, ZHAO Y X, et al. Low-rank and sparse matrix decomposition via the truncated nuclear norm and a sparse regularizer[J]. The Visual Computer, 2019, 35(11): 1549-1566.
- [6] AHN H, KANG M. Dynamic background subtraction with masked RPCA[J]. Signal, Image and Video Processing, 2021, 15(3): 467-474.
- [7] BOUWMANS T, JAVED S, ZHANG H Y, et al. On the applications of robust PCA in image and video processing [J]. Proceedings of the IEEE, 2018, 106(8): 1427-1457.
- [8] LIKASSA H T. New robust principal component analysis for joint image alignment and recovery via affine transformations, frobenius and  $L_{2,1}$  norms[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2020, 2020: 1-9.
- [9] CANDÈS E J, LI X D, MA Y, et al. Robust principal component analysis? [J]. Journal of the ACM, 2011, 58(3): 11.1-11.37.
- [10] LI C J. A new approximation of the matrix rank function and its application to matrix rank minimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2014, 163(2): 569-594.
- [11] LIN Z C, LIU R S, SU Z X. Linearized alternating direction method with adaptive penalty for low-rank representation[C]//Proceedings of the 24th International Conference on Neural Information Processing Systems. New York: ACM, 2011: 612-620.
- [12] TOH K C, YUN S. An accelerated proximal gradient algorithm for nuclear norm regularized linear least squares problems[J]. Pacific Journal of Optimization, 2010, 6(3): 615-640.
- [13] CAI J F, CANDÈS E J, SHEN Z W. A singular value thresholding algorithm for matrix completion[J]. SIAM Journal on Optimization, 2010, 20(4): 1956-1982.
- [14] GU S H, XIE Q, MENG D Y, et al. Weighted nuclear norm minimization and its applications to low level vision [J]. International Journal of Computer Vision, 2017, 121(2): 183-208.
- [15] OH T H, TAI Y W, BAZIN J C, et al. Partial sum minimization of singular values in robust PCA: Algorithm and applications[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2016, 38(4): 744-758.
- [16] RODRÍGUEZ P, WOHLBERG B. Fast principal component pursuit via alternating minimization[C]//2013 IEEE International Conference on Image Processing. Melbourne: IEEE, 2013: 69-73.
- [17] WEI K, CAI J F, CHAN T F, et al. Guarantees of Riemannian optimization for low rank matrix completion[J]. Inverse Problems & Imaging, 2020, 14(2): 233-265.
- [18] NGUYEN L T, KIM J, KIM S, et al. Localization of IoT networks via low-rank matrix completion[J]. IEEE Transactions on Communications, 2019, 67(8): 5833-5847.
- [19] VANDEREYCKEN B. Low-rank matrix completion by Riemannian optimization[J]. SIAM Journal on Optimization, 2013, 23(2): 1214-1236.
- [20] XUE Z C, DONG J, ZHAO Y X, et al. Low-rank and sparse matrix decomposition via the truncated nuclear norm and a sparse regularizer[J]. The Visual Computer, 2019, 35(11): 1549-1566.
- [21] XU Z Q, LU Y, WU J X, et al. Adaptive weighted robust principal component analysis[C]//2020 15th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications. Kristiansand: IEEE, 2020: 19-24.
- [22] GALLO O, GELFANDZ N, CHEN W C, et al. Artifact-free high dynamic range imaging[C]//2009 IEEE Interna-

tional Conference on Computational Photography. San Francisco: IEEE, 2009: 1-7.

- [23] DONG J, XUE Z C, WANG W W. Robust PCA using nonconvex rank approximation and sparse regularizer[J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2020, 39(6): 3086-3104.
- [24] LEE K C, HO J, KRIEGMAN D J. Acquiring linear subspaces for face recognition under variable lighting[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005, 27(5): 684-698.
- [25] PENG Y G, GANESH A, WRIGHT J, et al. RASL: Robust alignment by sparse and low-rank decomposition for linearly correlated images[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2012, 34(11): 2233-2246.
- [26] ZHANG X Q, WANG D, ZHOU Z Y, et al. Robust low-rank tensor recovery with rectification and alignment[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2021, 43(1): 238-255.

#### 作者简介



何 锐 男,1995年出生于四川广安.现为武汉科技大学信息科学与工程学院控制科学与工程硕士研究生.主要研究方向为低秩矩阵分解和图像处理.

E-mail: herui6543@163.com



伍世虔 男,1964年,江西赣州人.现为武汉科技大学信息科学与工程学院教授,博士生导师.主要研究领域包括计算机视觉、模式识别、机器学习及智能机器人.

E-mail: shiqian.wu@wust.edu.cn